可變拓樸機構矩陣表示法之比較

張隆裕[1]　郭進星[2]

[1]研究生，國立臺灣科技大學機械工程學系
[2]助理教授，國立臺灣科技大學機械工程學系

摘要

可變拓樸機構(Mechanism with variable topologies)在操作的過程中其拓樸構造(Topological structure)會因為部分接頭在機構運動的過程中受到的限制，造成運動方向或形態上的不同，而隨之改變，而此類接頭稱之為可變接頭(Variable joints)。本文的目的，在於討論與比較如何用矩陣表示法來表示可變拓樸機構的拓樸關係，與應用於可變拓樸機構的構形分解。本文首先介紹接頭碼(Joint codes)，說明其如何用來記錄各種接頭之方式。接著回顧和區分現有用於表示機構構形的各種矩陣表示法，並將各種方法加以分類，最後討論各種表示法用在可變拓樸機構的分解上與使用的優缺點。本文對可變拓樸機構的矩陣表示法的機構分解和構造表示的方法提供了一個綜合的比較，可做為後續可變拓樸機構分析之參考。

關鍵字：可變拓樸機構、矩陣表示法、構形分解

1. 前言

要將一個的機構構造呈現於在圖面上，最直覺的方法就是將其以圖畫(Graph)表示，利用圖形理論(Graph theory)將拓樸構造(Topological structure) [1]表示出來。然而，由於拓樸圖畫無法以電腦運算，於是開始有學者將拓樸圖畫轉換為矩陣來表示機構的拓樸構造。

隨著機構設計的發展，具有多種構形的可變拓樸機構漸漸到學者重視[2]。為了方便用電腦運算，學者開始思考如何用矩陣去表示和分析一個可變拓樸機構。例如：2005 年，Dai 和 Rees Jones 提出使用 EU-matrix transformations [3]以分析可變拓樸機構於構形發生變化的情況；2006 年，Yan 和 Kuo 提出了 Directionality topology matrix [4]，用於可變拓樸機構的矩陣表示法；2011 年，Slaboch 和 Voglewede 比較各種矩陣表示法後，提出一種可同時表示可變拓樸機構的拓樸特徵和各種構形的 Mechanism state matrix [5]，此方法已經可以將可變拓樸機構表示得相當清楚；可是，由於一個可變拓樸機構具有多種構形，在只知道主機構(Source metamorphic mechanism)[6]的情況下，要分解出所有的子機構(Sub-phase working mechanisms)，是相當不容易的，如果可以將可變拓樸機構的主機構利用矩陣表示法表示出來，再經由電腦計算出所有的子機構，在研究或設計可變拓樸機構的功能和變形上就會更佳便利。

由於機構的拓樸構造主要受接頭型態的變化而改變，因此本文首先條列所有適用於可變拓樸機構的矩陣表示法，並依照具接頭種類和無接頭種類之表示法進行分類。接著，討論可用於可變拓樸機構分解之方法，探討不同之差異。最後，討論矩陣表示法對於可變拓樸機構構造表示與分析之應用。

2. 可變拓樸機構

要描述機構的桿件與接頭之間的關係，首要任務為判認機構的拓樸構造。機構的拓樸構造是指機構中桿件與接頭的數目與類型，以及桿件和接頭之間的鄰接與附隨關係。在機構操作的過程中如果可以符合下列任一項條件即可稱為可變拓樸機構或可重構機構(Reconfigurable mechanism) [7]：

(a)桿件數或接頭數可以改變；
(b)接頭的類型可以改變；
(c)機構的拓樸關係可以改變；
(d)接頭的相對運動方向可以改變。

3. 可變接頭

大部份的可變拓樸機構之所以在操作的過程中其拓樸構造會發生改變，是因為運動過程中受到接頭和桿件的幾何外型限制，造成接頭的種類或者運動方向發生改變。而這類在機構操作的過程中可以改變型態或運動方向的接頭稱為可變接頭(Variable joints)。

3.1 接頭碼 (Joint codes)

為了方便記錄接頭的型態和運動的方向的特徵，可以使用接頭碼(Joint codes) [4]，如下式所表示，其中 α 和 β 分別表示接頭的類型和接頭的運動方向。

$$J(\alpha,\beta)=J_{\beta}^{\alpha} \tag{1}$$

3.2 接頭序列 (Joint sequences)

因為可變拓樸機構內的可變接頭有多種不同的形態，為了可以記錄每種接頭的拓樸構造變化，吾人可以將接頭碼寫成一接頭序列(Joint sequences)[4]，用來記錄在有多種拓樸結構時接頭的形態。接頭序列的表示方法可以寫成 $J(\alpha,\beta)$如式(2)所表示：

$$J(\alpha,\beta)=J_{\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n}^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n} \tag{2}$$

4. 矩陣表示法

要表示一個機構的拓樸構造，常見的使用方法為平面圖畫、機構簡圖、運動鏈以及矩陣。但是，其中只有用矩陣表示法較方便用電腦運算。而可變拓樸機構的拓樸構造變化的關鍵，便是桿件與桿件之間的可變接頭，因此本文依照接頭形態將矩陣表示法做一個區分，在對可變拓樸機構做分析的時候選擇具接頭形態的矩陣表示法，可以在機構的描述上更加詳盡。

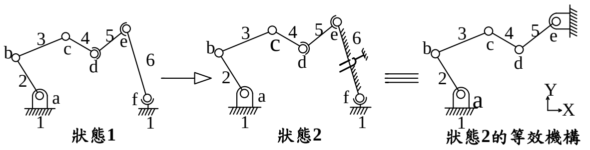

圖 1. 六連桿機構因限制造成拓樸構造改變

4.1 無接頭型態的矩陣表示法

4.1.1 Adjacency Matrix [8]

此表示法用來表示桿件與桿件之間的鄰接關係。使用步驟為：矩陣對角線元素皆為 0，將機構所有桿件用 1 到 n 標示，為 $n \times n$ 的矩陣，矩陣的行數 j 和列數 i 皆為機構上的桿件標示的編號，當兩個桿件互相鄰接時，其對應之矩陣元素標示為 1，沒有鄰接則標示為 0。因此，一個 Adjacency matrix 內的元素 $A(i,j)$可寫成：

$$A(i,j)=\begin{cases}\text{桿件 } i \text{ 和桿件 } j \text{ 有鄰接標記為 } 1\\ \text{桿件 } i \text{ 和桿件 } j \text{ 沒有鄰接標記為 } 0\end{cases}$$

用 Adjacency matrix 來表示圖 1 六連桿機構的狀態 1 如下式所示：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{3}$$

在 2008 年 Lan 和 Du [9] 改良 Adjacency matrix 提出"－1"來描述固定桿，當一個機構有 n 個桿件時用 Adjacency matrix 表示為 $n \times n$ 的矩陣，如果桿件數發生改變則矩陣的行列數也會跟著改變；可是，若用"－1"來表示固定端，則可以讓矩陣的行列數不發生改變。

例如，用改良後的 Adjacency matrix 來表示圖 1 的六連桿機構狀態 1 如下式所示：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&-1\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\-1&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{4}$$

4.1.2 Incidence Matrix [8]

此表示法用來表示桿件與接頭之間的附隨關係。使用步驟為：首先將機構所有桿件和接頭皆用 1 到 n 標示，矩陣的列數 i 表示機構上的桿件標示的編號，

行數 j 則代表機構裡接頭的編號，當接頭 j 與桿件 i 時，其對應矩陣元素標示為 1，若沒有附隨則標示為 0。因此，一個 Incidence matrix 內的元素 B(i , j)可寫成：

$$\mathrm{B}(i\,,j)\;=\;\begin{cases}\text{接頭}\,j\,\text{和桿件}\,i\,\text{有附隨標記為 1}\\ \text{接頭}\,j\,\text{和桿件}\,i\,\text{無附隨標記為 0}\end{cases}$$

用 Incidence matrix 來表示圖 1 的六連桿機構狀態 1 如下式所示：

$$\mathrm{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad(5)$$

4.1.3 EU-Matrix Transformations [3]

本表示法為一個矩陣轉換的方法，當機構在操作的過程中桿件數產生變化時，可以利用 EU-matrix transformations 推算出改變後的拓樸構造。本方法先將機構用 Adjacency matrix 表示，再利用 Dai 和 Ress Jones 所提出來的操作程序[3]，即可推算出不同拓樸構造的 Adjacency matrix。

4.2 具接頭型態的矩陣表示法

4.2.1 Directionality Topology Matrix [4]

此表示法不但可以用來表示桿件與桿件之間的鄰接關係，還可以表示出接頭種類和運動方向，並可利用接頭序列將可變拓樸機構一連串的變化過程同時表示出來，對於機構的拓樸構造描述的較為詳細。使用步驟為：先將機構所有桿件用 1 到 n 標示，所有接頭用 a 到 z 標示，矩陣的行數 j 和列數 i 皆表示機構上的桿件標示的編號，對角線元素為桿件的代碼，上三角矩陣元素代表桿件 i 和 j 之間的鄰接關係，以接頭碼表示，若兩桿沒有鄰接則表示為 0，如果有多種不同的拓樸構造，則可以用接頭序列表示；下三角矩陣元素則為桿件 j 和第桿件 i 附隨的接頭編碼。

用 Directionality topology matrix 來表示圖 1 的六連桿機構的所有構形的矩陣如下：

$$\mathrm{M_{DT}}=\begin{bmatrix}1&\mathrm{J^{R,R}_{z,z}}&0&0&0&\mathrm{J^{S,X}_{v,v}}\\ \mathrm{a}&2&\mathrm{J^{R,R}_{z,z}}&0&0&0\\0&\mathrm{b}&3&\mathrm{J^{R,R}_{z,z}}&0&0\\0&0&\mathrm{c}&4&\mathrm{J^{S,R}_{v,z}}&0\\0&0&0&\mathrm{d}&5&\mathrm{J^{S,R}_{v,z}}\\ \mathrm{f}&0&0&0&\mathrm{e}&6\end{bmatrix}\qquad(6)$$

4.2.2 Mechanism State Matrix [5]

此表示法是目前將機構的構造特徵記錄得最為完整的矩陣。使用步驟為：先將桿件從 1 到 n 標示，矩陣的列數 i 代表第 i 種狀態，矩陣行數 j 代表機構的第 j 根桿件，所以如果機構有 n 桿 m 種狀態，此矩陣則為 $m\times n$ 的矩陣，讀矩陣的方式必須由左讀到右，每列的表示式如下式：

$$\kappa_{(i,j)}\gamma^{\lambda_{1(i,j)}}_{1(i,j)\mu_{1(i,j)}},\gamma^{\lambda_{2(i,j)}}_{2(i,j)\mu_{2(i,j)}}\cdots\gamma^{\lambda_{r(i,j)}}_{r(i,j)\mu_{r(i,j)}}\qquad(7)$$

其中

$$\kappa_{(i,j)}=\ \text{機構的狀態}\,i\,\text{中}\begin{cases}\text{桿件}\,j\,\text{為固定桿標示為}\,\alpha\\ \text{桿件}\,j\,\text{不為固定桿標示為}\,\beta\end{cases}$$

$\gamma_{x(i,j)}$：機構的狀態 i 中和 j 桿件之間有接頭相接的桿件編碼。

x：整數 1 到 r。

r：和第 j 桿相連接桿件的編號。

$\lambda_{x(i,j)}$：機構的狀態 i 中連接桿件 j 和桿件 $\gamma_{x(i,j)}$ 的接頭種類。

$\mu_{x(i,j)}$：機構的狀態 i 中連接桿件 j 和桿件 $\gamma_{x(i,j)}$ 的接頭運動方向。

用 Mechanism state matrix 來表示圖 1 的六連桿機構的所有構形的拓樸構造矩陣可寫成下式：

$$\mathrm{M_{SM}}\ =\begin{bmatrix}\alpha2^{R}_{z},6^{S}_{v}&\beta3^{R}_{z}&\beta4^{R}_{z}&\beta5^{S}_{v}&\beta6^{S}_{v}&\beta\\ \alpha2^{R}_{z},6^{X}_{v}&\beta3^{R}_{z}&\beta4^{R}_{z}&\beta5^{R}_{z}&\beta6^{R}_{z}&\alpha\end{bmatrix}\qquad(8)$$

5. 以矩陣表示法為基礎之構形分解

可變拓樸機構在操作的過程中可以改變其拓樸構造，圖 2 為一個可變拓樸機構構形分解表，該機構除了主機構以外有三種不同的拓樸構造，在沒有圖表輔以說明時，吾人難以分析該機構的所有拓樸構造。因此，除了逐一模擬該機構各種狀態下的運動外，目前尚無其它方法可以快速地分析出該機構所有的構形。

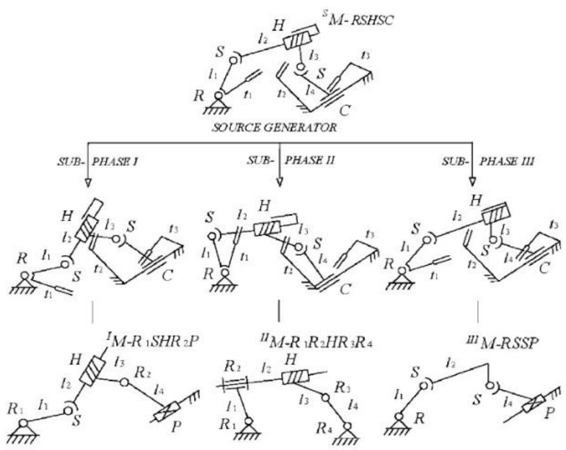

圖 2. 可變拓樸機構 [6]

在第 4 章所提到的所有矩陣表示法裡，只有 EU-matrix transformations 可以由矩陣運算求得不同狀態下的矩陣表示法，因此本文使用此方法當作矩陣表示法用於構形分解的範例。

例如，圖 3 為一個六連桿機構，假設當機構操作過程中遇到一個 U 型桿件加以限制，則第六桿無法繼續轉動，可視為固定桿，如圖 4 所示。因此六連桿機構由狀態 1 變為狀態 2，機構的桿件數在操作的過程中發生改變，此機連桿機構為可變拓樸機構，當狀態 1 變到狀態 2 時，此機構的拓樸構造也隨之改變。

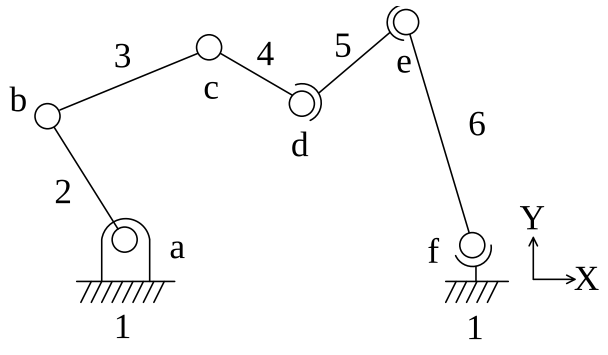

圖 3. 六連桿機構：狀態 1

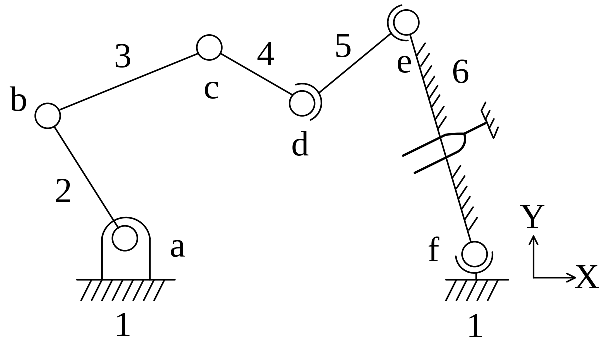

圖 4. 六連桿機構：狀態 2

使用 EU-matrix transformations 來進行構形的分解，首先可用 Adjacency matrix 將狀態 1 (圖 3)的機構構形表示為 A_1，接著按照步驟寫出矩陣 E (式(9))和矩陣 U (式(10))，然後，運用 EU-matrix transformations 運算規則(式(11))，最後即可求得 A_2(式(12))為狀態 2 (圖 4)的 Adjacency matrix：

$$E_6 = \begin{bmatrix} I_5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$U_{5,6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

$$A_2 = \left(E_6 U_{5,6}\right) A_1 (E_6 U_{5,6})^T \qquad (11)$$

若將矩陣作 2 進位同餘運算(modulo-2 arithmetic)可得：

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

如圖 4 所示，當六連桿機構受到限制變為狀態 2 時，接頭的種類也會因為限制條件改變，如果只用計算出來的 Adjacency matrix，並沒辦法說明接頭的種類已經改變。如圖 5 所示，當球窩接頭受到 U 形桿限制之後，接頭自由度改變，可等效為旋轉接頭。

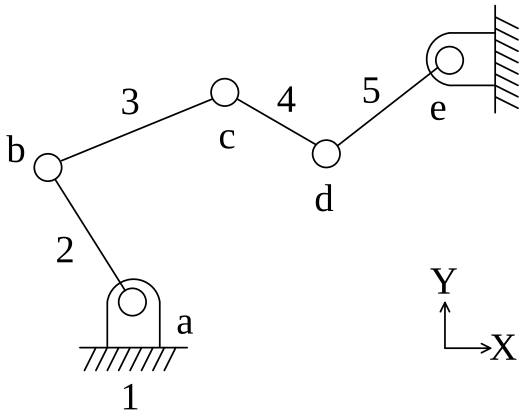

圖 5. 圖 4 的等效機構

6. 討論

無接頭型態的矩陣表示法 Adjacency matrix 和 Incidence matrix 為描述機構拓樸關係的兩種基本矩陣表示法，因為這兩種方法皆沒有記錄接頭型態，所以當可變拓樸機構的表示上，當接頭型態發生變化時，便無法清楚表示。

由上一章範例中可以看出，雖然 EU-matrix transformations 在可變拓樸機構的桿件數因為受到限制而減少時候，可以推算出不同構形的拓樸構造矩陣，可是因為該方法沿用 Adjacency matrix 來表示拓樸構造，仍無法表示接頭類型，所以對於可變拓樸機構的各種不同構形的分析上還是稍有不足，畢竟可變拓樸機構的各種不同構形，不是只有桿件數會發生變化，接頭型態也會隨之改變。

另一方面，Directionality topology matrix 率先將接頭碼加入矩陣表示法裡，而且對可變拓樸機構的每個拓樸構造做紀錄，但該方法還是沒辦法將可變拓樸機構做其分解。

目前 Mechanism state matrix 這個表示法是對於可變拓樸機構的所有特徵記錄的最完整的矩陣表示法，其不僅可以表示出可變拓樸機構的所有拓樸構造狀態，機構的接頭型態及拓樸變化關係也可以由此矩陣表示法裡判讀出來，並且可以推算出每個不同拓樸構造的機構的自由度。唯一美中不足的，便是該方法還沒辦法對構形做完整的分解。

7. 結論

本文比較目前所有可用於可變拓樸機構之矩陣表示法，包含 Adjacency matrix、Incidence matrix、EU-matrix transformations、Directionality topology matrix 和 Mechanism state matrix。討論後發現，只有 EU-matrix transformations 可以用來做構形的分解，但由範例中可見，該方法仍有其稍嫌不足之處，可做為未來在可變拓樸機構之矩陣表示法改良時之參考。再者，由可變拓樸機構之矩陣表示法的發展可以看出，可變拓樸機構的表示法必須記錄更多拓樸特徵，且對於這種擁有多種拓樸構造的機構還需要一種新的矩陣表示法運用在構形分解上，才能將可變拓樸機構的構造分析做的更方便且完整。

參考文獻

[1] Yan, H. S., "*Creative Design of Mechanical Devices*," Springer-Verlag, Singapore, 2006.

[2] Dai, J. S. and Rees Jones, J., "Mobility in Metamorphic Mechanisms of Foldable/Erectable Kinds" *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 121, No. 3, pp. 375-382, 1999.

[3] Dai, J. S. and Rees Jones, J., "Matrix Representation of Topological Changes in Metamorphic Mechanisms," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, No. 4, pp. 837-840, 2005.

[4] Yan, H. S. and Kuo, C. H., "Representations and identifications of structural and motion statecharac teristics of mechanisms with variable topologies ," *The Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering CSME*, Vol. 30, No. 1, pp. 19-40, 2006.

[5] Slaboch, B. J. and Voglewede, P. A., "Mechanism State Matrices for Planar Reconfigurable Mechanisms," *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 3, No. 1, pp. 011012(1-7), 2011.

[6] Zhang, L. and Dai, J. S., "Reconfiguration of Spatial Metamorphic Mechanisms," *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, Vol. 1, No. 1, pp. 011012, 2009.

[7] Kuo, C. H., Dai, J. S. and Yan, H. S., "Reconfiguration Principles and Strategies for Reconfigurable Mechanisms," *ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR2009)*, London,

UK,pp. 1-7, June 22-24, 2009.
[8] Tasi, L. W., "*Mechanism Design Enumeration of Kinematic Structures According to Function*," CRC Press, Boca Raton, FL, 2001.
[9] Lan, Z. H. and Du, R., "Representation of Topological Change in Metamorphic Mechanisms With Matrices of the Same Dimension," *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 130, No. 7, pp. 074501(1-4), 2008.

A Comparison of Matrix Representation Methods for Variable Topology Mechanisms

Lung-Yu Chang[1]　Chin-Hsing Kuo[2]
[1]Graduate Student, [2]Assistant Professor
Department of Mechanical Engineering
Nation Taiwan University of Science and Technology

ABSTRACT

Mechanism with variable topologies (MVTs) can change its topological structure because the kinematic types of certain joints are changeable during operation process. The kinematic joints with changable types and/or motion orientations are called "variable joints". This work reviews the methods for representing the topological structures of MVTs and discusses their the applications for structure decomposition of MVTs. First, we revisit the concept of joint codes for variable joints. Then, we review several topological representation methods for MVTs and compare their characteristics. Furthermore, we classify these representation methods into two different types based on the existence of joint types recorded. Last, we discuss the pros and cons of these methods when applied to MVTs and explore its application for structural decomposition of MVTs. The results of this study could be a reference work for the structural analysis of mechanism with variable topologies.

KEYWORDS：Mechanisms with variable topologies, Matrix representation, Configuration decomposition